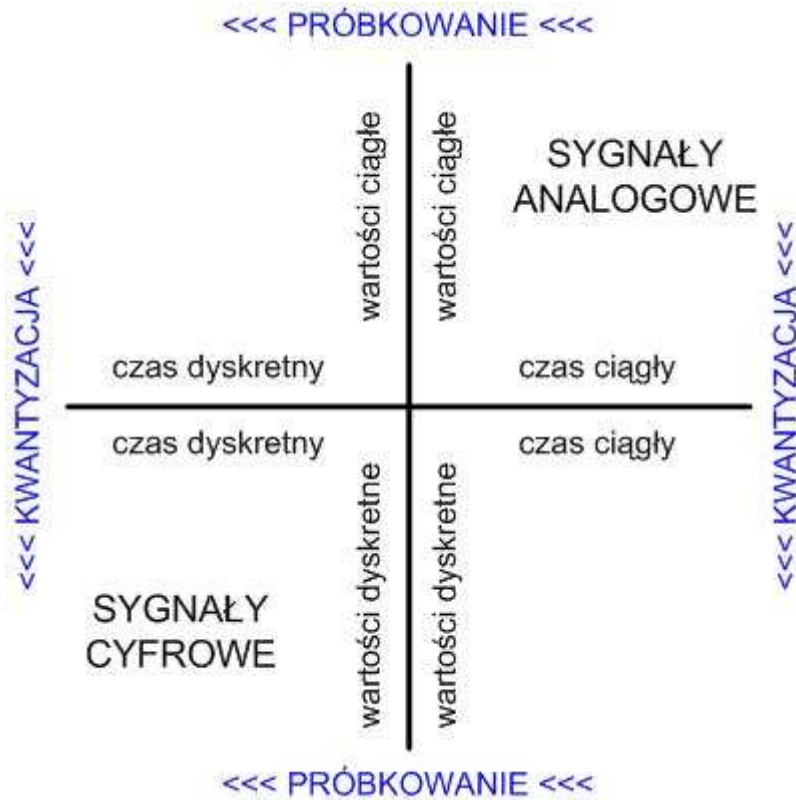
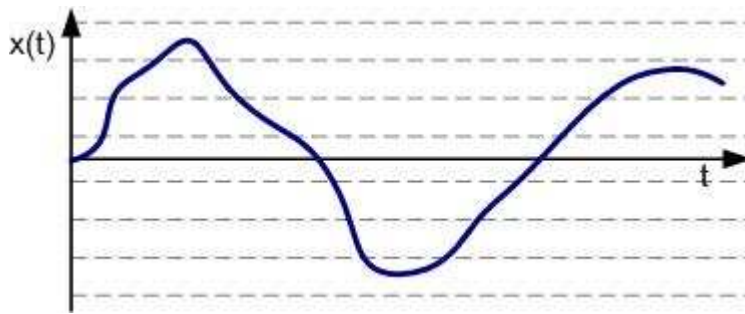


2. Sygnały i ich reprezentacje

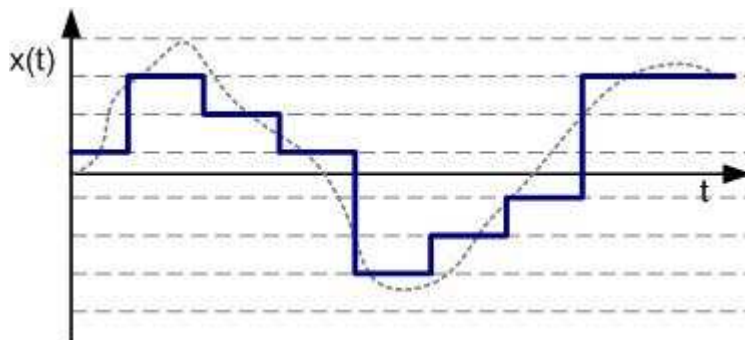
2.1. Podział sygnałów



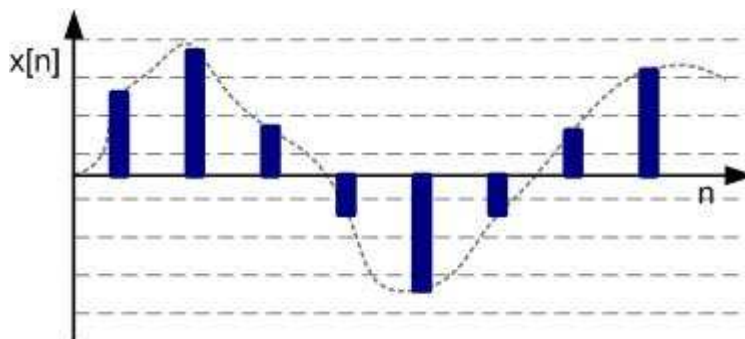
2.2. Reprezentacje czasowe sygnałów



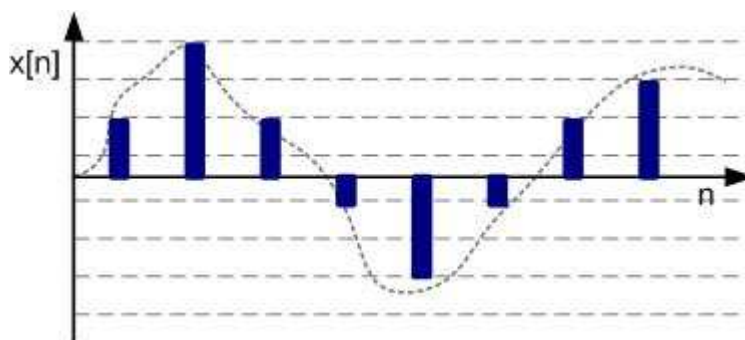
Rys. Sygnał z ciągłym czasem i ciągłymi wartościami



Rys. Sygnał z ciągłym czasem i kwantowanymi wartościami

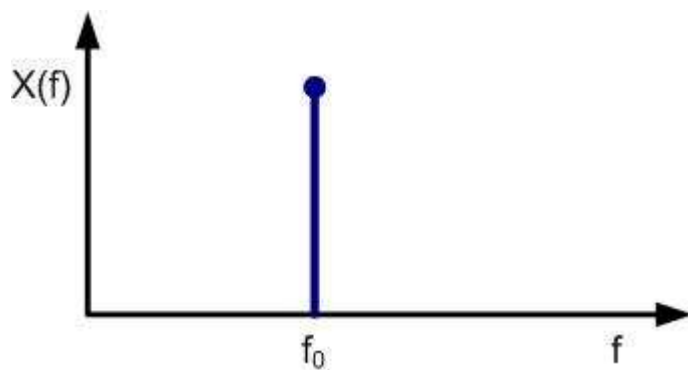


Rys. Sygnał z dyskretnym czasem i ciągłymi wartościami

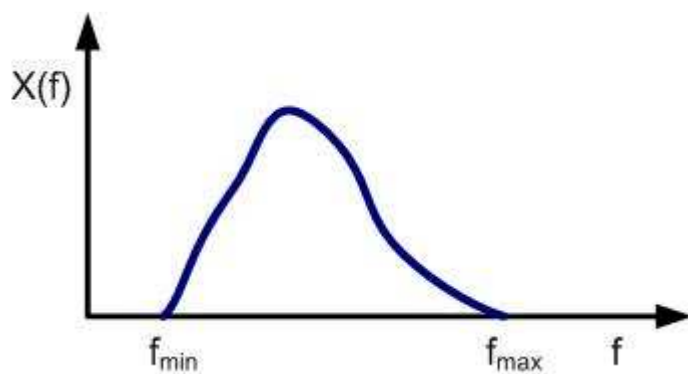


Rys. Sygnał z dyskretnym czasem i skwantowanymi wartościami

2.3. Widma sygnałów



Rys. Widmo sygnału harmonicznego (sinusoidalnego) o częstotliwości f_0



Rys. Widmo sygnału pasmowego

2. Transformata Fouriera

2.4. Definicja transformaty Fouriera

$$F\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \exp(-j2\pi ft) dt$$

wersja dla sygnałów dyskretnoczasowych (DFT):

$$F\{x[n]\} = X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(-j \frac{2\pi kn}{N})$$

2.5. Definicja odwrotnej transformaty Fouriera

$$F^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot \exp(j2\pi ft) df$$

wersja dla sygnałów dyskretnoczasowych (IDFT):

$$F^{-1}\{X[k]\} = x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \exp(j \frac{2\pi kn}{N})$$

Jak łatwo zauważyć transformata Fouriera jest zespoloną funkcją częstotliwości. Pozwala to na stosowanie zapisu:

$$X(f) = |X(f)| \cdot \exp[j\varphi(f)]$$

w którym:

$|X(f)|$ - nazywamy widmem amplitudowym sygnału

$\varphi(f)$ - nazywamy widmem fazowym sygnału

Dla często występującego w rzeczywistości przypadku, gdy sygnał jest sygnałem rzeczywistym, a nie zespolonym, można zauważyć następujące zależności:

$$X(-f) = X^*(f)$$

czyli:

$$|X(-f)| = |X(f)|$$

- widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest funkcją parzystą (symetryczną względem osi wartości)

$$\varphi(-f) = -\varphi(f)$$

- widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest funkcją nieparzystą (symetryczną względem początku układu współrzędnych)

Warunki istnienia transformaty Fouriera sygnału:

- o $x(t)$ jest funkcją jednowartościową i ma w każdym skończonym przedziale czasu skończoną liczbę maksimów i minimów
- o $x(t)$ ma skończoną liczbę nieciągłości
- o $x(t)$ jest bezwzględnie całkowalne tzn.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Jeżeli sygnał jest fizycznie realizowalny to możemy nie troszczyć się o warunki istnienia transformaty Fouriera. Każdy fizycznie realizowalny przebieg ma transformatę Fouriera.

Dalej można też stwierdzić, że każdy sygnał o skończonej energii ma transformatę w sensie Fouriera.

Przypomnienie: sygnał o skończonej energii

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

2.6. Własności transformaty Fouriera

1. Liniowość

$$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) \Leftrightarrow c_1 \cdot X_1(f) + c_2 \cdot X_2(f)$$

2. Rozciągnięcie osi czasu

$$x(a \cdot t) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

3. Dualizm czasowo-częstotliwościowy

$$\text{Jeśli } x(t) \Leftrightarrow X(f) \text{ to } X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

4. Przesunięcie w czasie

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f) \cdot \exp(-j2\pi f t_0)$$

5. Przesunięcie w częstotliwości – twierdzenie o modulacji

$$x(t) \cdot \exp(j2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f - f_c)$$

6. Pole funkcji $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0)$$

7. Pole funkcji $X(f)$

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$$

8. Pochodna po czasie (różniczkowanie w dziedzinie czasu)

$$\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)$$

9. Całkowanie w dziedzinie czasu

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f)$$

10. Sprzężenie

$$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(f)$$

11. Mnożenie w dziedzinie czasu – spłot w dziedzinie częstotliwości

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(f - \lambda) d\lambda$$

12. Spłot w dziedzinie czasu – mnożenie w dziedzinie częstotliwości

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$